

第2讲 二次函数解析式、图象变换

一、二次函数解析式

1. 二次函数一般式

任意一个二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 都可以运用配方法，把它的解析式化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式：

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\&= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\&= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c \\&= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] - \frac{b^2}{4a} + c \\&= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.\end{aligned}$$

因此，抛物线的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ，顶点是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ 。

$y = ax^2 + bx + c$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	
函数最值	有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$	有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点纵坐标的值	
增减性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而减小	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而增大
	当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而增大	当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而减小
开口大小	$ a $ 越大，开口越小； $ a $ 越小，开口越大。 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐增大。	

【备注】 二次函数的增减性，常考察比较函数值的大小，根据开口方向、离对称轴的远近进行判断：

$a > 0$ 时，离对称轴越远函数值越大； $a < 0$ 时，离对称轴越远函数值越小

思考：

已知二次函数图象上的三点坐标（或称函数的三对对应值） (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) ，确定该函数解析式

思路点拨： 采用待定系数法求二次函数解析式

解：

【备注】 待定系数法

解：设函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

将 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 代入解析式中，得

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}, \text{解方程组即可得到 } a, b, c$$

从而求得二次函数解析式

! 总结:

- ①任何二次函数都可以整理成 一般 式 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的形式 .
 ②已知任意 3 点坐标, 可用一般式求解二次函数解析式 .

🍎 举个“栗”子

栗子1

1. 2018~2019学年10月天津河西区天津市新华中学初三上学期月考第5题3分 ★★

二次函数 $y = x^2 + 2x - 5$ 有 () .

- A. 最大值 -5 B. 最小值 -5 C. 最大值 -6 D. 最小值 -6

【备注】 当自变量范围为全体实数时, 顶点的纵坐标即为函数的最值

【答案】 D

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = x^2 + 2x - 5$ 中 $a = 1 > 0$,

$\therefore$ 此函数有最小值,

$$\therefore y_{\text{最小}} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 1 \times (-5) - 2^2}{4 \times 1} = -6.$$

故选 D .

【标注】 【知识点】实数范围内求二次函数最值

2. 2017~2018学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期期末第1题3分 ★★

已知抛物线 $y = x^2 - 2mx - 4 (m > 0)$ 的顶点 M 关于坐标原点 O 的对称点为 M' , 若点 M' 在这条抛物线上, 则点 M 的坐标为 () .

- A. $(1, -5)$ B. $(3, -13)$ C. $(2, -8)$ D. $(4, -20)$

【备注】 选填空题中顶点坐标可直接利用顶点坐标公式求出, 关于原点对称横纵坐标都要变为相反数, 然后根据 M' 也在函数上, 将 M 点坐标代入即可

【答案】 C

【解析】 $y = x^2 - 2mx - 4 = x^2 - 2mx + m^2 - m^2 - 4 = (x - m)^2 - m^2 - 4$.

$\therefore$ 点 $M(m, -m^2 - 4)$.

$\therefore$ 点 $M'(-m, m^2 + 4)$.

$\therefore m^2 + 2m^2 - 4 = m^2 + 4$.

解得 $m = \pm 2$.

$\because m > 0$,

$\therefore m = 2$.

$\therefore M(2, -8)$.

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点

栗子2

3. 2019~2020学年4月山东济南市中区济南实验初中（经六路本校）初三下学期月考第9题4分 ★★

若二次函数 $y = x^2 - 6x + 9$ 的图象经过 $A(-1, y_1)$, $B(1, y_2)$, $C(3 + \sqrt{3}, y_3)$ 三点 . 则关于 y_1 , y_2 , y_3 大小关系正确的是 () .

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_1 > y_3 > y_2$ C. $y_2 > y_1 > y_3$ D. $y_3 > y_1 > y_2$

【备注】先求解二次函数的对称轴，开口向上离对称轴越远函数值越大，因此判断 A 、 B 、 C 离对称轴的远近即可（横坐标相减）

【答案】 A

【解析】二次函数对称轴为直线 $x = -\frac{-6}{2 \times 1} = 3$,

$$3 - (-1) = 4 ,$$

$$3 - 1 = 2 ,$$

$$3 + \sqrt{3} - 3 = \sqrt{3} ,$$

$$\because 4 > 2 > \sqrt{3} ,$$

$$\therefore y_1 > y_2 > y_3 .$$

故选：A .

【标注】【知识点】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的增减性

栗子3

4. 2018~2019学年10月天津河西区天津市海河中学初三上学期月考第9题3分 ★★

已知抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$, 当 $1 \leq x \leq 5$ 时 , y 的最大值是 () .

- A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

【备注】此题可发现对称轴并不在自变量的范围内，因此我们要根据自变量范围与对称轴的位置关系，利用函数的增减性进行判断；可进一步提问学生 y 的最小值为多少

【答案】 C

【解析】

∵ 抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 的二次项系数 $a = -\frac{1}{3} < 0$,

∴ 该抛物线图象的开口向下,

而对称轴就是 y 轴,

∴ 当 $1 \leq x \leq 5$ 时, 抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $1 \leq x \leq 5$ 时, $y_{\text{最大值}} = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$.

【标注】【知识点】给定范围求二次函数最值

栗子4

5. 2020~2021学年天津红桥区初三上学期期末第17题3分 ★★

当 $x \geq m$ 时, 二次函数 $y = -x^2 + 3x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小, 则实数 m 的取值范围是 _____.

【备注】 二次函数开口向下, 对称轴为 $x = \frac{3}{2}$; 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, y 随 x 的增大而减小, 要使 $x \geq m$ 在对称轴的右侧, 即 $m \geq \frac{3}{2}$

【答案】 $m \geq \frac{3}{2}$

【解析】 $y = -x^2 + 3x = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$,
当 $x \geq \frac{3}{2}$ 时, y 随 x 的增大而减小,
则 $m \geq \frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

栗子5

6. 2019~2020学年天津河东区初三上学期期中第21题8分 ★★

已知一个二次函数的图象经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 和 $C(0, -3)$ 三点.

(1) 求此二次函数的解析式.

(2) 求此二次函数的图象的对称轴和顶点坐标.

【备注】 已知函数上三个点的坐标, 利用待定系数法将三个点的坐标代入即可; 二次函数的顶点坐标和对称轴, 需要利用配方的思想, 配成顶点式

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) $x = 1$, $(1, -4)$.

【解析】 (1) 设抛物线解析式 $y = a(x+1)(x-3)$,
把 $(0, -3)$ 代入 $y = a(x+1)(x-3)$ 中,

得 $-3a = -3$,

解得 $a = 1$,

$\therefore$ 抛物线解析式 $y = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$.

(2) $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$,

$\therefore$ 顶点坐标 $(1, -4)$,

对称轴为直线 $x = 1$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

独步天下1

7. 2017~2018学年天津河北区初三上学期期中第10题3分 ★★★

已知两点 $M(-6, y_1)$, $N(2, y_2)$ 均在抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上, 点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线的顶点, 若 $y_0 \leq y_2 < y_1$, 则 x_0 的取值范围是 ().

A. $x_0 < -2$

B. $x_0 > -2$

C. $-6 < x_0 < -2$

D. $-2 < x_0 < 2$

【备注】 自变量范围为全体实数时, 二次函数的最值一定在顶点处取得, 因此根据 $y_0 \leq y_2 < y_1$, 可得 y_0 为最小值, 开口向上 $a > 0$, 将 -6 、 2 代入到函数解析式中然后根据不等关系求出 a 、 b 的关系, 由 $x_0 = -\frac{b}{2a}$ 求出 x_0 的范围

【答案】 B

【解析】 $\because$ 点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线的顶点, $y_1 > y_2 \geq y_0$, $M(-6, y)$, $N(2, y_2)$,

$\therefore$ 抛物线有最小值, 函数图象开口向上,

$\therefore a > 0$, $\therefore 36a - 6b + c > 4a + 2b + c$,

$\therefore -\frac{b}{2a} > -2$,

$\therefore x_0 > -2$,

故选 B.

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

2. 二次函数顶点式

$y = a(x - h)^2 + k$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = h$	
顶点坐标	(h, k)	
函数最值	有最小值 k	有最大值 k
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点纵坐标的值	
增减性	当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而减小	当 $x < h$ 时， y 随 x 的增大而增大
	当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而增大	当 $x > h$ 时， y 随 x 的增大而减小

思考：

当已知抛物线的顶点坐标时，最少还需要几个点来确定二次函数的解析式？

【备注】 二次函数的顶点式： $y = a(x - h)^2 + k$ ，已知二次函数顶点坐标，则只有 a 未知，因此最少再确定一个点的坐标即可求出函数解析式。

当已知二次函数顶点时，可直接利用待定系数法表示二次函数顶点式，如顶点坐标为 $(1, 2)$ ，

则设二次函数解析式为 $y = a(x - 1)^2 + 2$

！总结：

- ① 已知抛物线 顶点 和图象上 任意 一点，可利用顶点式求二次函数解析式
- ② 已知 对称轴 时，也可以设顶点式

🍎 举个“栗子”

栗子6

8. 2020~2021学年10月天津红桥区天津市怡和中学初三上学期月考第2题 ★

二次函数 $y = 2(x + 1)^2 + 3$ 的顶点坐标是 () .

- A. $(-1, -3)$ B. $(-1, 3)$ C. $(1, -3)$ D. $(1, 3)$

【备注】

$y = a(x - h)^2 + k$ 的顶点坐标为 (h, k) ；要注意括号内为“-”号

【答案】 B

【解析】 二次函数 $y = 2(x + 1)^2 + 3$ 的顶点坐标是 $(-1, 3)$.

故选 B .

【标注】 【知识点】 二次函数顶点式

栗子7

9. 2018~2019学年天津河东区初三上学期期中第5题3分 ★★

若 $A(-4, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(2, y_3)$ 为二次函数 $y = -(x - 2)^2 + 3$ 的图象上的三点, 则 y_1 , y_2 , y_3 大小关系是 () .

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_3 < y_1 < y_2$ C. $y_3 < y_2 < y_1$ D. $y_2 < y_1 < y_3$

【备注】 开口向下, 离对称轴越远函数值越小, 此题要注意对称轴为 $x = 2$; 这类题目在解题时, 一定要注意好开口方向

【答案】 A

【解析】 $y = -(x - 2)^2 + 3$ 的对称轴为 $x = 2$ 且开口向下,

当 $x < 2$ 时, y 随 x 增大而增大,

$\because A(-4, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(2, y_3)$ 为二次函数 $y = -(x - 2)^2 + 3$ 的图象上的三点,

$\therefore y_1 < y_2 < y_3$,

故选 A .

【标注】 【知识点】 二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象和性质

栗子8

10. 2019~2020学年10月河南洛阳廾河回族区洛阳东方外国语学校初三上学期月考第9题3分 ★★

已知二次函数 $y = -3(x - h)^2 + 5$, 当 $x > -2$ 时, y 随 x 的增大而减小, 则有 () .

- A. $h \geq -2$ B. $h \leq -2$ C. $h > -2$ D. $h < -2$

【备注】 开口向下, 对称轴为 $x = h$, 当 $x > h$ 时, y 随 x 的增大而减小, 要使 $x > -2$ 在对称轴右侧, 可得 $h \leq -2$

【答案】 B

【解析】 $\because a = -3$,

$\therefore$ 二次函数开口向下,

∴二次函数对称轴的右边 y 随 x 的增大而减小，

∴ $h \leq -2$.

故选：B .

【标注】【知识点】二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

栗子9

11. 2019~2020学年9月天津河西区天津市第四十二中学初三上学期月考第5题3分 ★★

一个二次函数的图象的顶点坐标是 $(2, 4)$ ，且过另一点 $(0, -4)$ ，则这个二次函数的解析式为 () .

A. $y = -2(x+2)^2 + 4$

B. $y = -2(x-2)^2 + 4$

C. $y = 2(x+2)^2 - 4$

D. $y = 2(x-2)^2 - 4$

【备注】 设解析式为 $y = a(x-2)^2 + 4$ ，将 $(0, -4)$ 代入

【答案】 B

【解析】 ∵二次函数的图象的顶点坐标是 $(2, 4)$ ，

∴设这个二次函数的解析式为 $y = a(x-2)^2 + 4$ ，

把 $(0, -4)$ 代入得 $a = -2$ ，

∴这个二次函数的解析式为 $y = -2(x-2)^2 + 4$.

【标注】【知识点】二次函数顶点式

栗子10

12. 2019~2020学年北京通州区初三上学期期末第21题5分 ★★

已知某二次函数图象上部分点的横坐标 x 、纵坐标 y 的对应值如下表，求此函数表达式 .

x	...	-1	0	1	3	4	...
y	...	0	3	4	0	-5	...

【备注】 此题方法不唯一

①一般式求解：利用待定系数法，将三个点的坐标代入求解析式

②顶点式求解：分析表格可得到当 $x = -1$ 和 $x = 3$ 的函数值相等，可得 $(-1, 0)$ ， $(3, 0)$ 关于对称轴对称，因此 $x = 1$ 为二次函数的对称轴， $(1, 4)$ 为顶点坐标，然后利用待定顶点式求解

【答案】 $y = -(x-1)^2 + 4$.

【解析】 对称轴为 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, 4)$ ，

$$y = a(x-1)^2 + 4,$$

过 $(-1, 0)$,

解得 $a = -1$, $y = -(x-1)^2 + 4$.

【标注】【知识点】二次函数顶点式

3. 二次函数交点式

思考一：

如何求解二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交点坐标？

令 $y = 0$, 可得 $ax^2 + bx + c = 0$, 所以方程的根就是二次函数与 x 轴交点的横坐标

思考二：

假设二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有两个交点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, 即 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根, 那么二次函数的解析式与 x_1, x_2 有什么关系呢？

由韦达定理有 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$,

因此, $y = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$

$$= a [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = a (x - x_1)(x - x_2)$$

由此可得: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ 也是表示二次函数的一种解析式, 叫作 **交点式**, 其中 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根, 即二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象与 x 轴公共点的 **横** 坐标; 对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

【备注】对称轴 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 可由中点坐标公式求解出, x_1, x_2 的中点即为顶点横坐标; 此对称轴的求解方法不局限于 x 轴的交点, 只要两点的纵坐标值相等, 即可利用求其横坐标的中点。

对于任意的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$,

当 $x = 0$ 时, 利用求根公式可得 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

可知 $|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$ (即二次函数与 x 轴两个交点的距离)。

！总结：

当已知抛物线与 **x 轴** 交点时, 可设交点式求二次函数的解析式。

1. 已知抛物线与 x 轴交点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 和图象上任意一点, 设交点式 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, 再代入另一点坐标解关于 a 的方程即可;

2. 类似地, 若已知抛物线与直线 $y = m$ 交点 $A(x_1, m)$, $B(x_2, m)$ 和图象上任意一点, 设两根式 $y = a(x - x_1)(x - x_2) + m$, 再代入另一点坐标解关于 a 的方程即可.

注意: 二次函数的交点式不能作为最后的结果, 要将其化为一般式或顶点式

举个“栗子”

栗子11

13. 2017~2018学年9月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第7题3分 ★★★

如果抛物线经过点 $A(2, 0)$ 和 $B(-1, 0)$, 且与 y 轴交于点 C , 若 $OC = 2$, 则这条抛物线的解析式是 () .

A. $y = x^2 - x - 2$

B. $y = -x^2 - x - 2$ 或 $y = x^2 + x + 2$

C. $y = -x^2 + x + 2$

D. $y = x^2 - x - 2$ 或 $y = -x^2 + x + 2$

【备注】 $OC = 2$, 可得 $C(0, 2)$ 或 $(0, -2)$, 代入 $y = a(x - 2)(x + 1)$ 中, 求出函数解析式

【答案】 D

【解析】 设抛物线解析式为 $y = a(x - 2)(x + 1)$,

$\because OC = 2$,

$\therefore C$ 点坐标为 $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$,

把 $C(0, 2)$ 代入 $y = a(x - 2)(x + 1)$ 得 $a \cdot (-2) \cdot 1 = 2$,

解得 $a = -1$,

此时抛物线解析式为 $y = -(x - 2)(x + 1)$,

即 $y = -x^2 + x + 2$;

把 $C(0, -2)$ 代入 $y = a(x - 2)(x + 1)$ 得 $a \cdot (-2) \cdot 1 = -2$,

解得 $a = 1$,

此时抛物线解析式为 $y = (x - 2)(x + 1)$,

即 $y = x^2 - x - 2$.

即抛物线解析式为 $y = -x^2 + x + 2$ 或 $y = x^2 - x - 2$.

故选 D.

【标注】 【知识点】二次函数双根式 (交点式)

栗子12

14. 2020~2021学年天津和平区初三上学期期末第3题3分 ★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象上部分点的坐标如下表所示:

x	$\dots$	-1	0	1	2	$\dots$

y	...	0	3	4	3	...
-----	-----	---	---	---	---	-----

则该函数图象的顶点坐标为 () .

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 3)$ C. $(1, 4)$ D. $(2, 3)$

【备注】 观察表格可得 $(0, 3)$ 和 $(2, 3)$ 关于对称轴对称, 利用 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 求出对称轴即可

【答案】 C

【解析】 由题可知, 该二次函数上的点 $(0, 3)$ 和点 $(2, 3)$ 的纵坐标都相同, 所以易知二次函数的对称轴为 $x = 1$, 而对称轴与二次函数图象的交点就是二次函数的定点, 所以该二次函数的顶点为 $(1, 4)$. 故选 C.

【标注】 【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点

15. 2018~2019学年广东广州越秀区初三上学期期末第8题3分 ★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$) 中的 x 与 y 的部分对应值如下表, 该抛物线的对称轴是直线 () .

x	-1	0	1	3
y	-1	3	5	3

- A. $x = 0$ B. $x = 1$ C. $x = 1.5$ D. $x = 2$

【备注】 观察表格可得 $(0, 3)$ 和 $(3, 3)$ 关于对称轴对称, 利用 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 求出对称轴即可。一定要注意通过公式分析对称轴, 不能只根据表格中的 0, 3 中间为 1 就直接选

【答案】 C

【解析】 由表知当 $x = 0$ 和 $x = 3$ 时, $y = 3$, $\therefore$ 该抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{0 + 3}{2}$, 即 $x = 1.5$, 故选 C.

【标注】 【知识点】已知抛物线上对称的两点求对称轴

栗子13

16. 2019~2020学年9月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第22题8分 ★★

已知二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过三点 $(1, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, -\frac{3}{2})$.

(1) 求二次函数的解析式.

(2) 若(1)中的二次函数, 当 x 取 $a, b (a \neq b)$ 时, 函数值相等, 求 x 取 $a+b$ 时的函数值.

【备注】 第一问直接利用交点式求解即可; 第二问要注意, a, b 关于对称轴对称, 所以 $\frac{a+b}{2}$ 为二次函数对称轴, 求出 $a+b$ 的值后代入即可

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$.

(2) $-\frac{3}{2}$.

【解析】 (1) 设抛物线解析式为 $y = a(x-1)(x+3)$,

将 $(0, -\frac{3}{2})$ 代入,

解得 $a = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$.

(2) 当 $x = a$ 时, $y_1 = \frac{1}{2}a^2 + a - \frac{3}{2}$,

当 $x = b$ 时, $y_1 = \frac{1}{2}b^2 + b - \frac{3}{2}$,

$\therefore \frac{1}{2}a^2 + a - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}b^2 + b - \frac{3}{2}$,

$\therefore a^2 - b^2 + 2(a-b) = 0$,

即 $(a-b)(a+b+2) = 0$,

$\because a \neq b$,

$\therefore a+b = -2$.

$\therefore y_1 = \frac{1}{2}(a+b)^2 + (a+b) - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2} \times (-2)^2 - 2 - \frac{3}{2}$

$= -\frac{3}{2}$,

即 x 取 $a+b$ 时的函数值为 $-\frac{3}{2}$.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

二、二次函数图象变换

1. 二次函数的平移

二次函数平移口诀: 上加下减, 左加右减, 上下平移在末梢, 左右平移在括号

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
上下平移 n 的单位的解析式	$y = ax^2 + bx + c \pm n$	$y = a(x - h)^2 + k \pm n$
左右平移 m 的单位的解析式	$y = a(x \pm m)^2 + b(x \pm m) + c$	$y = a(x - h \pm m)^2 + k$

【备注】 一般式与顶点式都可以进行函数的平移，应用一般式左右平移时一定要注意所有的 x 都要变化，如果这部分经常错的话，可以让学生先将一般式化为顶点式，然后利用顶点式进行平移

🍌 举个“栗”子

栗子14

17. 2018~2019学年天津宝坻区宝坻区第八中学初三上学期期中第7题3分 ★★

要将抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 平移后得到抛物线 $y = x^2$ ，下列平移方法正确的是（ ）。

- A. 向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位 B. 向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位
C. 向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位 D. 向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位

【备注】 此题没有办法直接通过一般式分析怎样平移能得到 $y = ax^2$ ，因此需要先将一般式化为顶点式然后再利用平移口诀求解

【答案】 D

【解析】 $y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ ，

该抛物线的顶点坐标是 $(-1, 2)$ ，抛物线 $y = x^2$ 的顶点坐标是 $(0, 0)$ ，

则平移的方法可以是：将抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 向右移 1 个单位，再向下平移 2 个单位。

故选：D。

【标注】 【知识点】二次函数平移变换

栗子15

18. ★★

若抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 不动，将平面直角坐标系 xOy 先沿水平方向向右平移一个单位，再沿铅直方向向上平移三个单位，则原抛物线图象的解析式应变为（ ）。

- A. $y = (x - 2)^2 + 3$ B. $y = (x - 2)^2 + 5$ C. $y = x^2 - 1$ D. $y = x^2 + 4$

【备注】 注意此题是平面直角坐标系进行移动，平面直角坐标系的移动与函数的平移是相反的，即平面直角坐标系向右移动，相当于函数向左平移，因此需要反向思考函数具体是怎样平移

的

【答案】 C

【解析】 将平面直角坐标系 xOy 先沿水平方向向右平移一个单位，再沿铅直方向向上平移三个单位，相当于把抛物线向左平移一个单位，再向下平移三个单位，

$$\therefore y = (x-1)^2 + 2,$$

$$\therefore \text{原抛物线图象的解析式应变为 } y = (x-1+1)^2 + 2 - 3 = x^2 - 1.$$

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

栗子16

19. 2017年天津中考真题第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 与 x 轴相交于点 A, B (点 A 在点 B 左侧)，顶点为 M . 平移该抛物线，使点 M 平移后的对应点 M' 落在 x 轴上，点 B 平移后的对应点 B' 落在 y 轴上 . 则平移后的抛物线解析式为 () .

A. $y = x^2 + 2x + 1$ B. $y = x^2 + 2x - 1$ C. $y = x^2 - 2x + 1$ D. $y = x^2 - 2x - 1$

【备注】 先求出 A, B, M 的坐标，然后求 M', B' 的坐标由点的变化分析函数的变化

【答案】 A

【解析】 令 $y = 0 = x^2 - 4x + 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$,

$$\therefore A(1, 0), B(3, 0), y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1,$$

$$\therefore M(2, -1),$$

$\therefore$ 平移后 M' 落在 x 轴上，

$\therefore$ 图像向上平移 1 个单位，

$\therefore$ 平移后 B' 落在 y 轴上，

$\therefore$ 图像向左平移 3 个单位，

$$\therefore \text{平移后的解析式为 } y = (x-2+3)^2 - 1 + 1 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

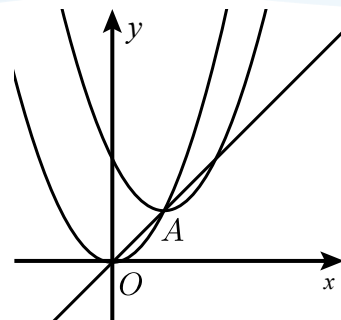
故选 A .

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

栗子17

20. 2020~2021学年10月天津南开区天津市第五十中学初三上学期月考第12题3分 ★★

如图，把抛物线 $y = x^2$ 沿直线 $y = x$ 平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度后，其顶点在直线上的 A 处，则平移后的抛物线的解析式是 () .

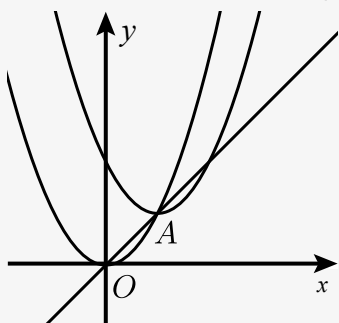


- A. $y = (x+1)^2 - 1$ B. $y = (x+1)^2 + 1$ C. $y = (x-1)^2 + 1$ D. $y = (x-1)^2 - 1$

【备注】 二次函数沿着某条特殊直线平移，意味着开口大小和方向不变，顶点在这条直线上平移

【答案】 C

【解析】 如图，把抛物线 $y = x^2$ 沿直线 $y = x$ 平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度后，其顶点在直线上的 A 处，则平移后的抛物线解析式是 $y = (x-1)^2 + 1$.



【标注】 【知识点】二次函数平移变换

2. 二次函数的对称

二次函数关于坐标轴对称口诀： 关于谁谁不变，另一个变相反，关于原点都要变

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x-h)^2 + k$
关于 x 轴对称	$y = -ax^2 - bx - c$	$y = -a(x-h)^2 - k$
关于 y 轴对称	$y = ax^2 - bx + c$	$y = a(x+h)^2 + k$
关于原点对称	$y = -ax^2 + bx - c$	$y = -a(x+h)^2 - k$

【备注】 关于原点对称也可称为绕原点旋转 180°

二次函数的特殊对称：

①关于顶点对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于 x 轴对称后, 开口大小 不变, 方向 改变, a 变成 $-a$, 顶点 (h, k) 不变, 所以新的解析式为 $y = -a(x - h)^2 + k$.

②关于某点 (m, n) 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于原点对称后, 开口大小 不变, 方向 改变, a 变成 $-a$, 把顶点 (h, k) 先关于 (m, n) 变成 $(2m - h, 2n - k)$, 所以新的解析式为 $y = -a(x - 2m + h)^2 + 2n - k$.

③关于直线 $y = m$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $y = m$ 对称, 开口大小 不变, 方向 改变, a 变成 $-a$, 把顶点 (h, k) 关于直线 $y = m$ 对称变成 $(h, 2m - k)$, 所以新的解析式为 $y = -a(x - h)^2 + 2m - k$.

④关于直线 $x = n$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $x = n$ 对称, 开口大小 不变, 方向 不变, a 变成 $-a$, 把顶点 (h, k) 关于直线 $x = n$ 对称变成 $(2n - h, k)$, 所以新的解析式为 $y = a(x - 2n + h)^2 + k$.

【备注】 特殊对此这部分我们要利用二次函数的顶点式进行求解, 因此对于一般式要先将其化为顶点式; 二次函数几个特殊变换是由图象上每个点以此变换得到的, 因此选择特殊点—顶点变化后的对应点, 然后根据开口方向直接写出解析式

🍬 举个“栗子”

栗子18

21. 2018~2019学年10月天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期月考第6题3分 ★★★

如果二次函数的图象与已知二次函数 $y = x^2 - 2x$ 的图象关于 y 轴对称, 那么这个二次函数的解析式是 ().

- A. $y = -x^2 + 2x$ B. $y = x^2 + 2x$ C. $y = -x^2 - 2x$ D. $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$

【备注】 关于 y 轴对称, y 不变, x 变相反

【答案】 B

【解析】 $\because y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1, -1)$,

$\therefore$ 关于 y 轴对称顶点坐标为 $(-1, -1)$,

$\therefore y = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$.

【标注】 【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

栗子19

22. 2019~2020学年11月天津南开区天津崇化中学初三上学期月考第11题 ★★★

在平面直角坐标系中，有两条抛物线关于 x 轴对称，且它们的顶点相距 6 个单位长度，若其中一条抛物线的函数表达式为 $y = -x^2 + 4x + m$ ，则 m 的值（ ）。

A. 1或7

B. -1或7

C. 1或-7

D. -1或-7

【备注】 此题可得到两个顶点也关于 x 轴对称，根据顶点相距 6 个单位，可得两个顶点的纵坐标为 3 或 -3；给定抛物线的顶点纵坐标为 $m + 4$ ，令 $m + 4 = 3$ 或 $m + 4 = -3$ 即可

【答案】 D

【解析】 $\because$ 一条抛物线的函数表达式为 $y = -x^2 + 4x + m$ ，

$\therefore$ 这条抛物线的顶点为 $(2, m + 4)$ ，

$\therefore$ 关于 x 轴对称的抛物线的顶点 $(2, -m - 4)$ ，

$\therefore$ 它们的顶点相距 6 个单位长度。

$\therefore |m + 4 - (-m - 4)| = 6$ ，

$\therefore 2m + 8 = \pm 6$ ，

当 $2m + 8 = 6$ 时， $m = -1$ ，

当 $2m + 8 = -6$ 时， $m = -7$ ，

$\therefore m$ 的值是 -1 或 -7。

故选 D。

【标注】 【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

栗子20

23. 2018~2019 学年 10 月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第 16 题 3 分 ★★

将抛物线 $y = (x - 1)^2 - 7$ 沿直线 $x = \frac{3}{2}$ 翻折，得到的新的抛物线的解析式为 _____。

【备注】 先求顶点关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称的对应点坐标，根据开口大小和开口方向均不变直接写出解析式

【答案】 $y = (x - 2)^2 - 7$

【解析】 抛物线 $y = (x - 1)^2 - 7$ 的顶点坐标为 $(1, -7)$ ，

而点 $(1, -7)$ 关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 的对称点为 $(2, -7)$ ，

所以新抛物线的解析式为 $y = (x - 2)^2 - 7$ 。

故答案为： $y = (x - 2)^2 - 7$ 。

【标注】 【知识点】二次函数关于平行坐标轴的直线对称

24. 2020~2021学年10月天津和平区天津市益中学校初三上学期月考第13题3分 ★★

将抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 绕其顶点旋转 180° 后，所得到的新的抛物线的解析式为 _____ .

【备注】 绕顶点旋转 180° ，顶点坐标不变，开口方向相反

【答案】 $y = -x^2 - 2x - 3$

【解析】 $y = x^2 + 2x - 1$,

$$= (x^2 + 2x) - 1$$

$$= (x^2 + 2x + 1 - 1) - 1$$

$$= (x^2 + 2x + 1) - 1 - 1$$

$$= (x + 1)^2 - 2 ,$$

将原抛物线绕顶点旋转 180° 后，

$$\text{得 } y = -(x + 1)^2 - 2 ,$$

$$\text{即： } y = -x^2 - 2x - 3 .$$

【标注】 【知识点】二次函数图象关于任意点对称

25. 2019~2020学年2月陕西西安雁塔区陕西师范大学附属中学初三下学期周测B卷第10题3分 ★★

若将二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$ 的图象绕着点 $(-1, 0)$ 旋转 180° ，得到新的二次函数

$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，那么 c 的值为 () .

A. -15

B. -8

C. -24

D. -9

【备注】 先求出顶点关于 $(-1, 0)$ 对称的对应点坐标，然后根据开口方向相反写出解析式，然后再转化为一般式判断

【答案】 A

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ 的顶点坐标为 $(2, -1)$ 且图象绕定点旋转 180° ，得到顶点坐标也是绕定点旋转 180° .

$\therefore$ 绕 $(-1, 0)$ 旋转 180° 后的抛物线的顶点坐标为 $(-4, 1)$,

$\therefore$ 所得到的图象的解析式为 $y = -(x + 4)^2 + 1 = -x^2 - 8x - 15$.

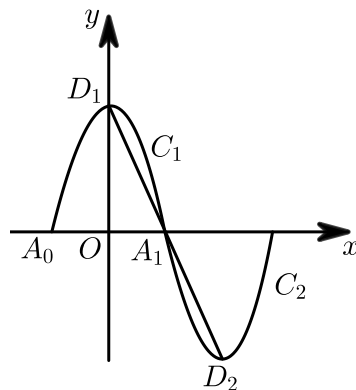
$\therefore c$ 的值为 -15 .

故选 A .

【标注】 【知识点】二次函数图象关于任意点对称

26. 2019年天津河北区初三中考一模第12题3分 ★★★

如图，一段抛物线 $y = -x^2 + 9$ ($-3 \leq x \leq 3$) 为 C_1 ，与 x 轴交于 A_0 ， A_1 两点，顶点为 D_1 ；将 C_1 绕点 A_1 旋转 180° 得到 C_2 ，顶点为 D_2 ； C_1 与 C_2 组成一个新的图象．垂直于 y 轴的直线 l 与新图象交于点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ ，与线段 D_1D_2 交于点 $P_3(x_3, y_3)$ ，且 x_1 ， x_2 ， x_3 均为正数，设 $t = x_1 + x_2 + x_3$ ，则 t 的最大值是 () ．



A. 15

B. 18

C. 21

D. 24

【备注】 此题中 x_1 与 x_2 是关于 C_2 的对称轴对称的，根据二次函数的几何变换，可求出 C_2 的对称轴为 6，因此 $x_1 + x_2 = 12$ ；当 x_3 最大时， t 最大，分析 x_3 的最大值即可

【答案】 B

【解析】 抛物线 C_1 的解析式为 $y = -x^2 + 9$ ，

旋转后 C_2 的解析式为 $y = (x - 6)^2 - 9$ ，

$\because x_1, x_2$ 均为正数，

$\therefore$ 点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 在第四象限，

$\therefore$ 直线 l 和 C_2 相交且对称轴 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 6$ ，

$\therefore x_1 + x_2 = 12$ ，

若使 t 最大则就是 x_3 最大即可，

又 $\because 3 \leq x_3 \leq 6$ ，

$\therefore 15 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$ ，

即 $15 \leq t \leq 18$ ．

故选 B．

【标注】 【知识点】二次函数图象关于任意点对称